

STEREOMETRIE

STEREOMETRIE



- = prostorová geometrie, geometrie v prostoru
- část M zkoumající vlastnosti prostor. útvarů
- vychází z tzv. **axiómů**, využívá věty

Axióm je jednoduché názorné tvrzení,
které se nedokazuje.

Věty lze z axiómů a definic logicky odvodit, jejich platnost je třeba dokazovat.

Značení: **A** – axiómy Euklidovské geometrie

V – věta

Základní geometrické objekty

bod - značení: velká písmena abecedy

přímka - značení: malá písmena abecedy

rovina - značení: malá písmena řecké abecedy

Stereometrie zkoumá **vlastnosti**

➤ **polohové** - vzájemná poloha útvarů

➤ **metrické** - odchylky a vzdálenosti útvarů



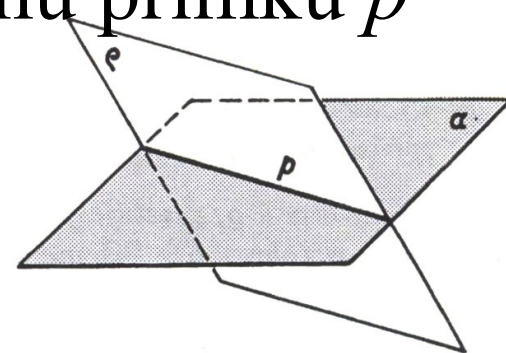
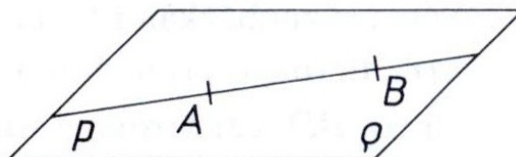
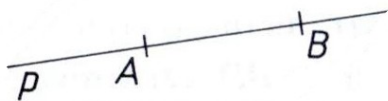
Základní axiomy

A1: Dvěma různými body A, B je určena právě jedna přímka p .

A2: Leží-li dva různé body v rovině ρ , pak přímka p jimi určená leží také v rovině ρ .

A3: Mají-li dvě různé roviny α, ρ společný bod P ,

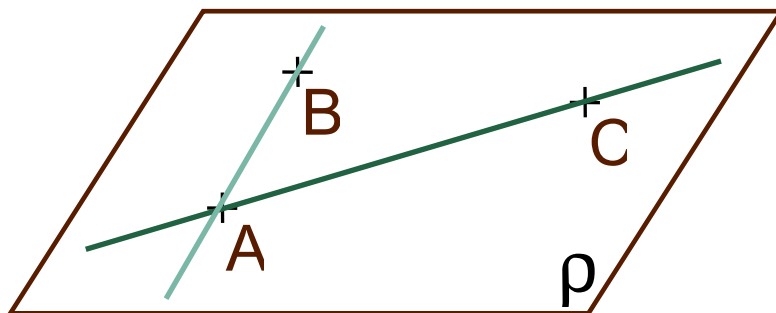
pak mají společnou právě jednu přímku p procházející tímto bodem.



Základní axiomy

A4: Rovina je jednoznačně určena:

- a) třemi různými body, které neleží v přímce
- b) přímkou a bodem, který na ní neleží
- c) dvěma různoběžnými přímkami
- d) dvěma různými rovnoběžnými přímkami



Vztahy bod - bod, přímka, rovina

bod A splývá s bodem B

dva různé body A, C

bod A leží na přímce a

bod B neleží na přímce a

bod A leží v rovině α

bod B neleží v rovině α

Značení:

$$A = B \quad (A \equiv B)$$

$$A \neq C$$

$$A \in a$$

$$B \notin a$$

$$A \in \alpha$$

$$B \notin \alpha$$

B
+

A

+

C

A

+

B

a

+

B

+

A

α



Vzájemná poloha dvou přímek

- **rovnoběžné**

$\Leftrightarrow$ leží v jedné rovině a nemají společný bod

– značení: $p \parallel q$

- b) splývající**

$\Leftrightarrow$ leží v jedné rovině a mají ∞ společných bodů

– značení: $p = q$

- c) různoběžné**

$\Leftrightarrow$ leží v jedné rovině a mají společný bod (průsečík)

– značení: $p \times q$

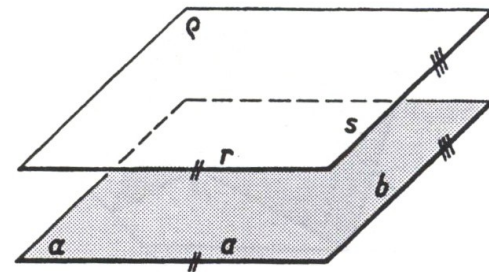
- d) mimoběžné**

$\Leftrightarrow$ neleží v jedné rovině (nemají spol. bod)

Vzájemná poloha dvou rovin

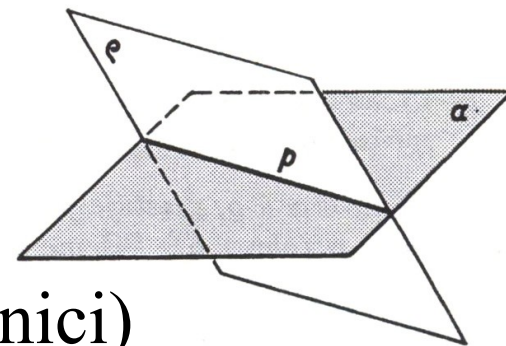
a) rovnoběžné

$\Leftrightarrow$ nemají žádný společný bod
– značení: $\alpha \parallel \rho$



b) splývající

$\Leftrightarrow$ mají ∞ společných bodů
– značení: $\alpha = \rho$



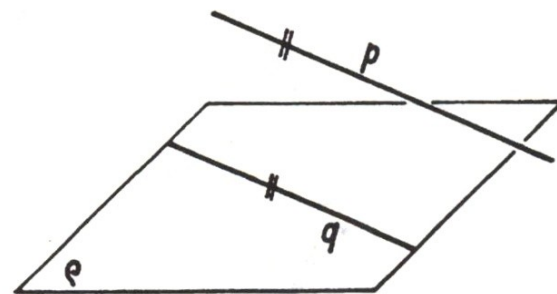
c) různoběžné

$\Leftrightarrow$ mají společnou přímku (průsečnici)
– značení: $\alpha \times \rho$

Vzájemná poloha přímky a roviny

a) přímka leží v rovině

- $\Leftrightarrow$ mají ∞ společných bodů
– značení: $q \in \rho$

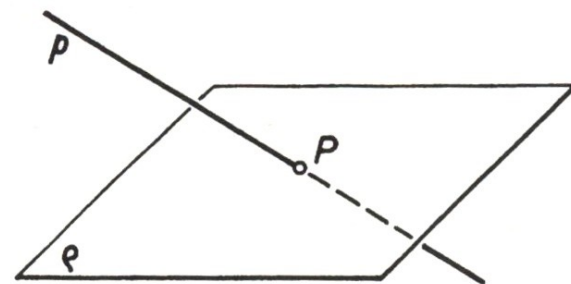


b) přímka je s rovinou rovnoběžná

- $\Leftrightarrow$ nemají žádný společný bod
– značení: $p \parallel \rho$

c) přímka je s rovinou různoběžná

- $\Leftrightarrow$ mají jediný společný bod
(průsečík)
– značení: $p \times \rho$



Cvičení

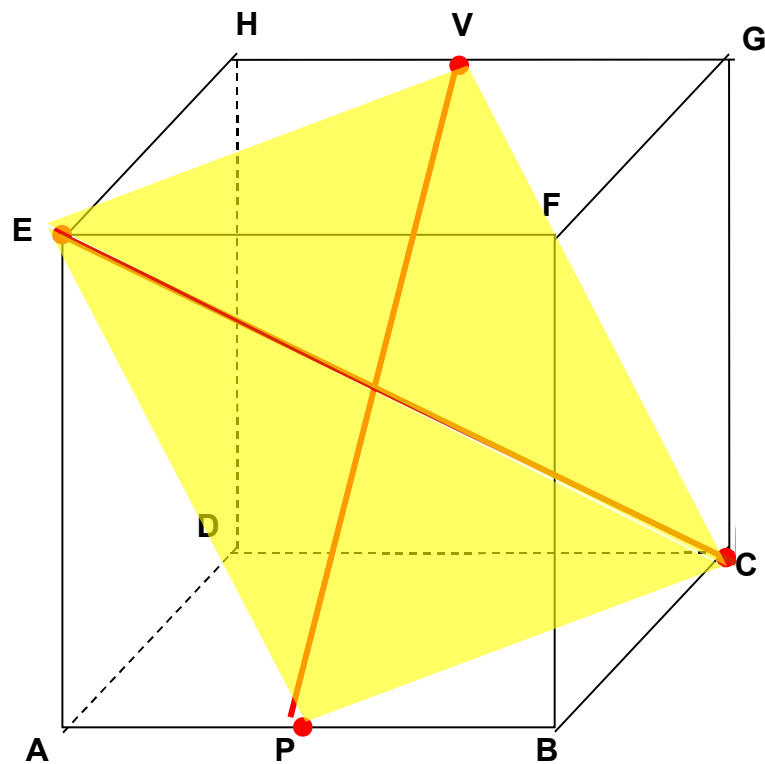
Př. 1: Je dána krychle ABCDEFGH.

- a) Určete různým způsobem rovinu dolní stěny.
- b) Rozhodněte, zda v této rovině leží přímky BD, BH.

Př. 2: Body P, R, S, T, U, V jsou po řadě středy hran AB , AE , BC , CG , EH , GH krychle ABCDEFGH.
Zjistěte, zda leží v téže rovině body

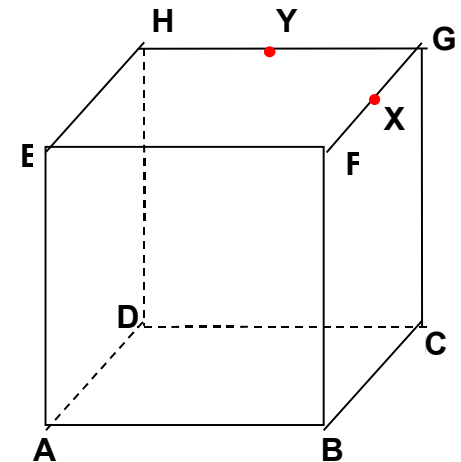
- ? a) P, R, S, T
- ? b) A, C, E, F
- ? c) C, R, U, V
- ? d) C, E, P, V

Př. 2 d)



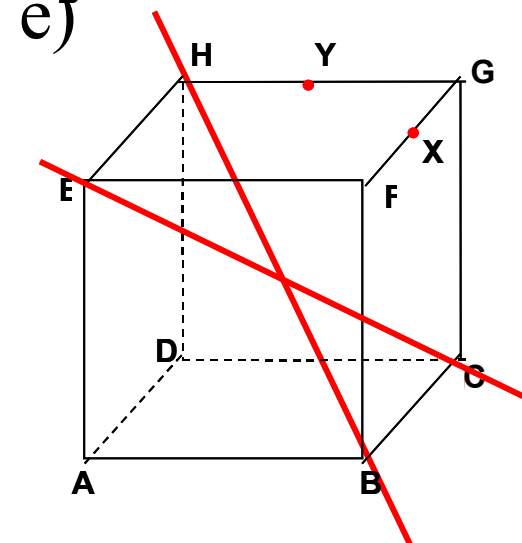
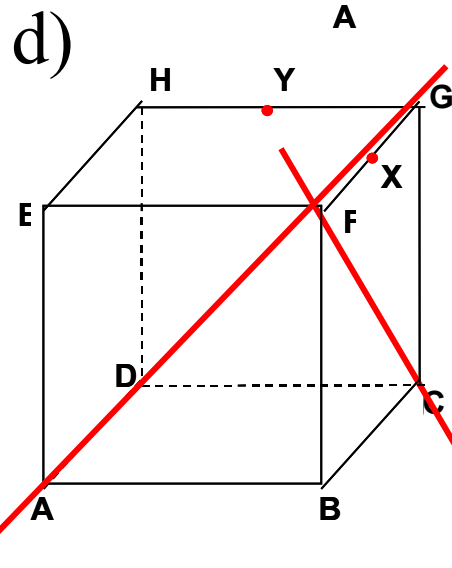
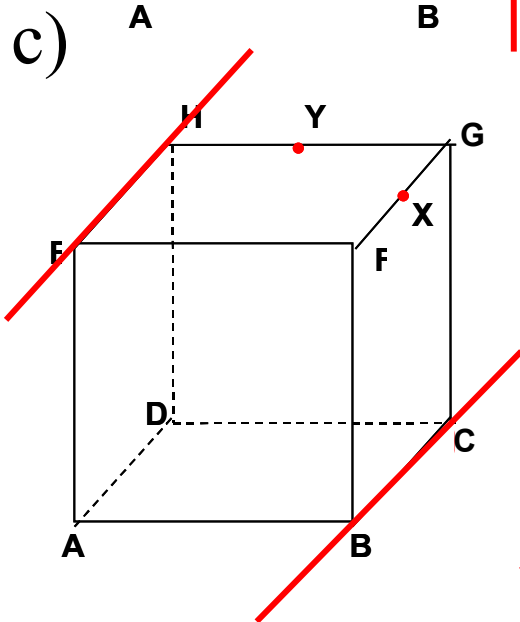
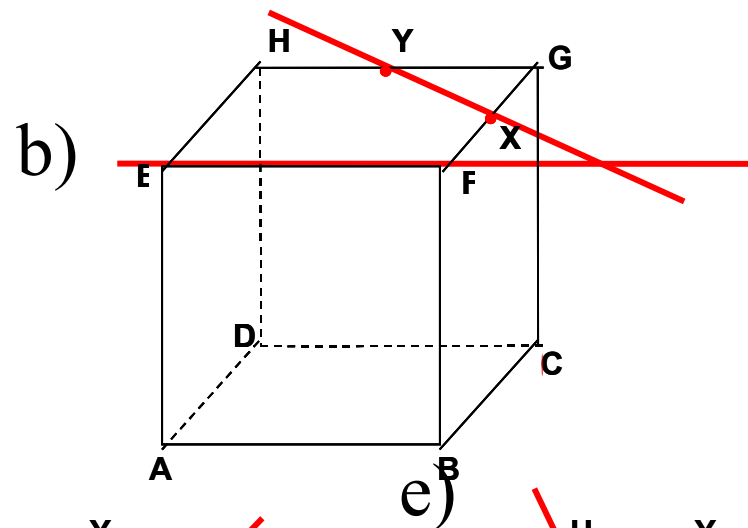
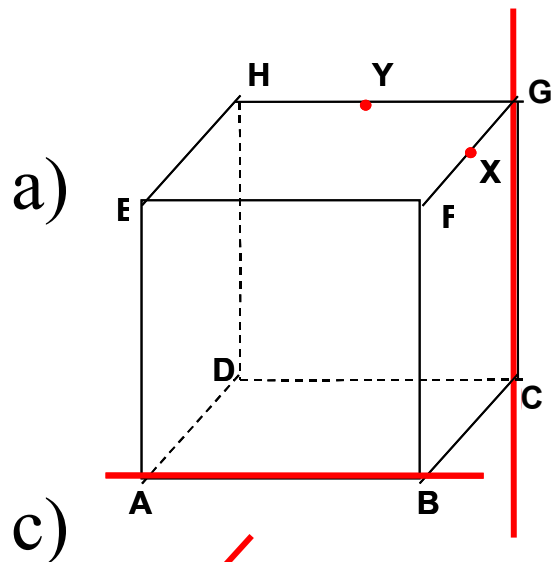
Cvičení

Př. 3: Je dána krychle $ABCDEFGH$.
Určete vzájemnou polohu
přímek.



- | | | |
|---|--|------------|
| ? | a) AB, CG | mimoběžné |
| ? | b) EF, XY – X je střed FG , Y střed GH | různoběžné |
| ? | c) BC, EH | rovnoběžné |
| ? | d) AX, CF | mimoběžné |
| ? | e) BH, CE | různoběžné |

Cvičení



Cvičení

Př. 4: Je dána krychle. Určete **průsečnici** rovin

? a) ADH, BCH

? b) ABC, FGH

? c) ACE, BDF

Př. 5: Je dána krychle ABCDEFGH. Body K, L, M, N jsou po řadě středy stěn ABCD, BCFG, EFGH, ADHE. Jaká je **vzájemná poloha**

? a) přímky KL a roviny CDH.

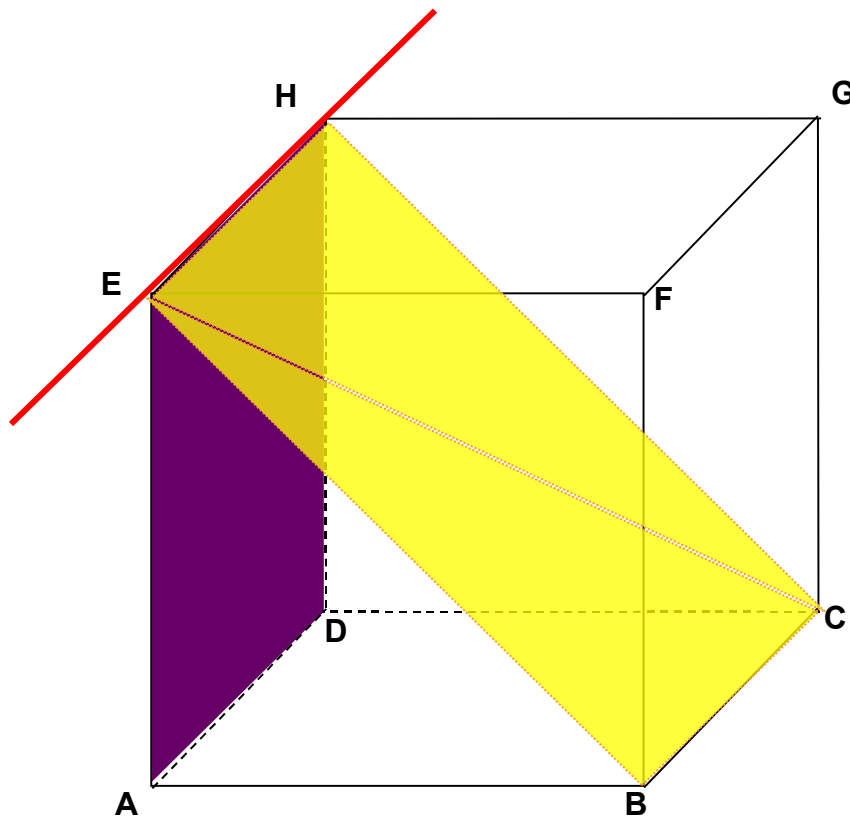
? b) přímky LN a roviny ABG.

? c) přímky KH a roviny EFG.

rovnoběžné
splývající
různoběžné

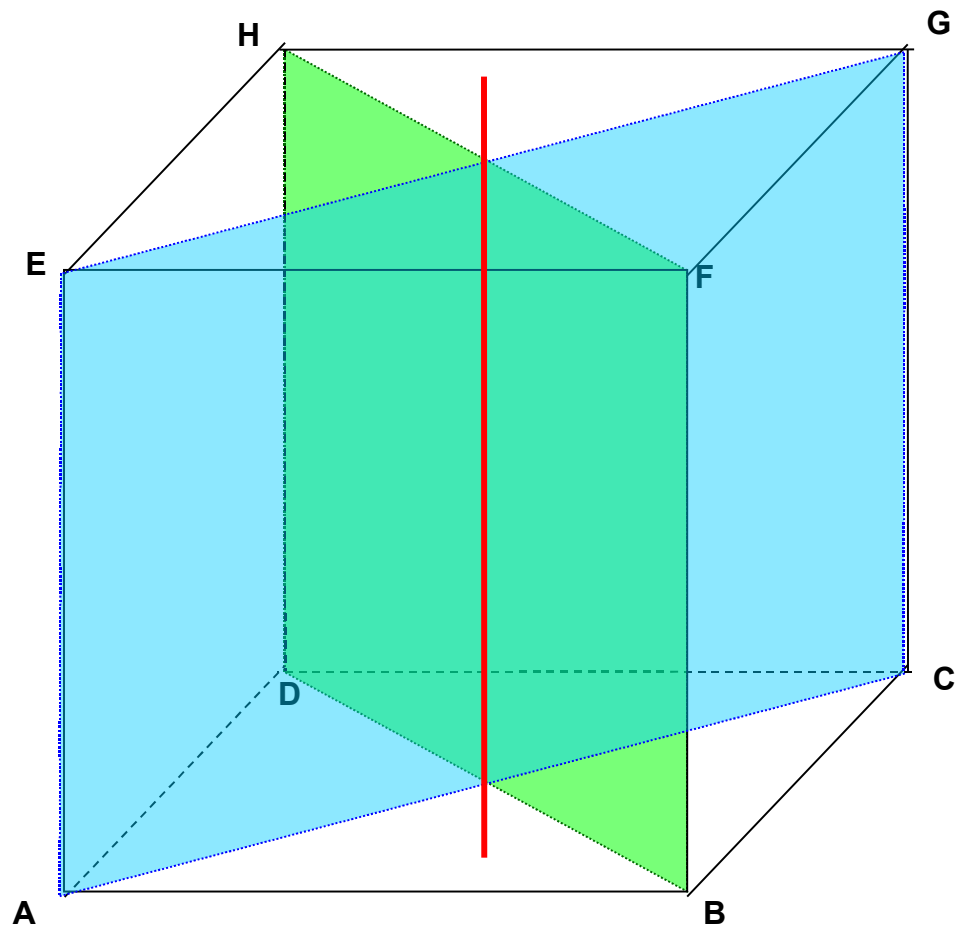
Cvičení

4 a)



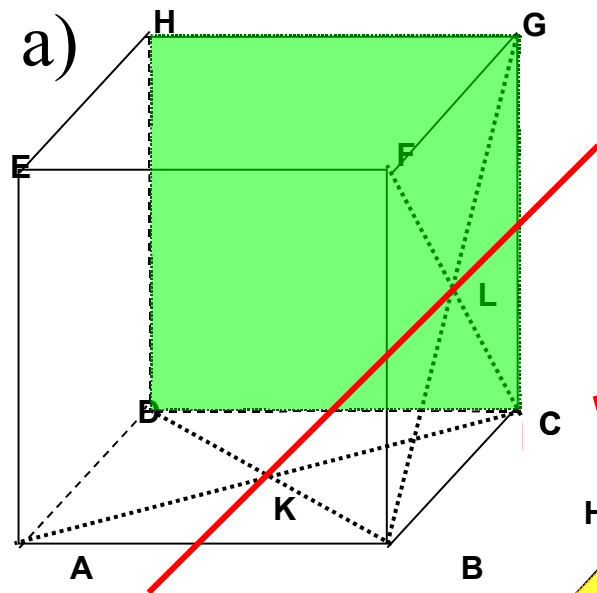
Cvičení

4 c)

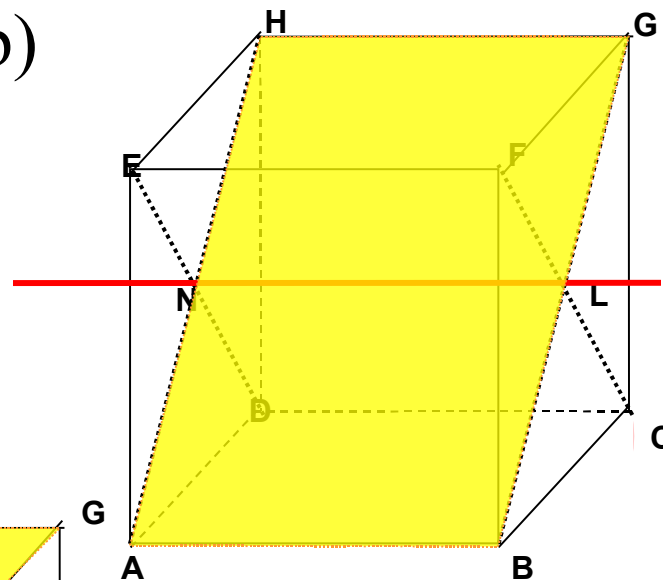


Cvičení

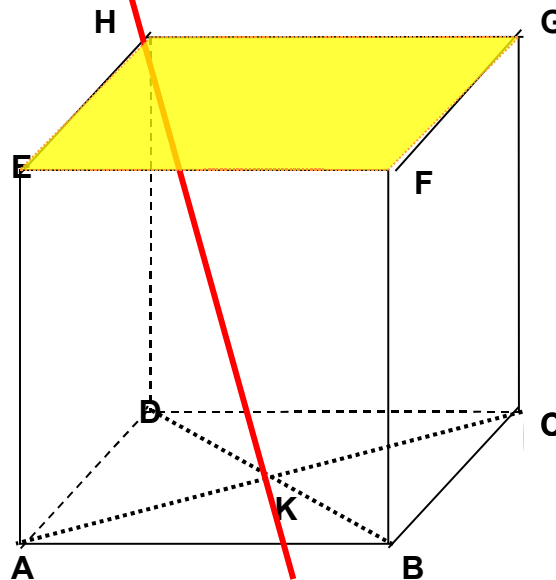
5 a)



b)



c)

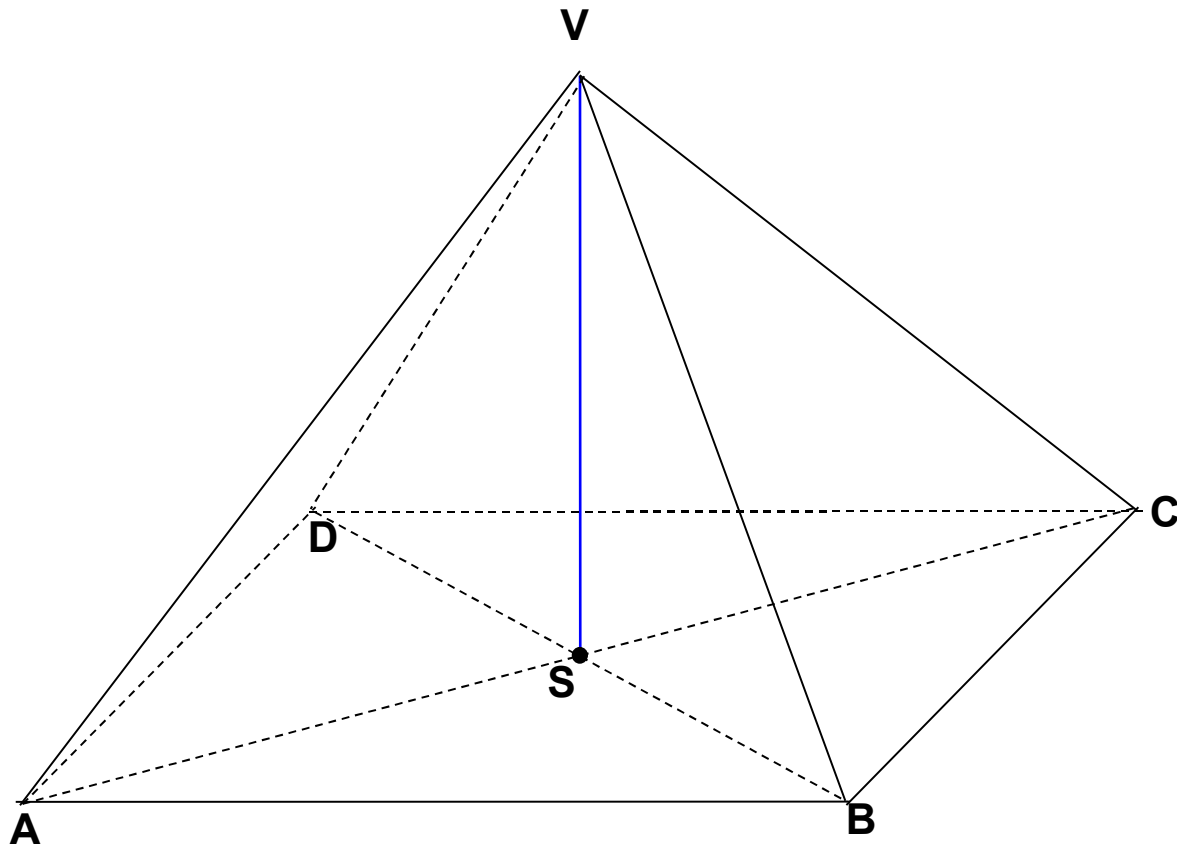


Cvičení

Př. 6: Je dán čtyřboký jehlan $ABCDV$. Jaká je **vzájemná poloha**

- ☐ a) přímky CD a BV . mimoběžné
- ☐ b) přímky AC a CV . různoběžné
- ☐ c) přímky AD a BC . rovnoběžné
- ☐ d) přímky AB a SV , kde S je střed podstavy jehlanu. mimoběžné

Cvičení



Odchylka dvou přímek

Odchylka α dvou přímek a, b je **úhel** velikosti 0° - 90° , který má zvolený vrchol V v průsečíku přímek a, b a ramena na daných přímkách.

Poznámka:

- 1) Odchylka dvou rovnoběžných přímek je 0° .
- 2) Odchylka kolmých přímek je 90° .
- 3) Odchylku mimoběžek převedeme na odchylku dvou různoběžek.



Odchylka přímky a roviny

Odchylka přímky a roviny je rovna úhlu, který svírá přímka se svým pravoúhlým průmětem do této roviny.

Odchylka dvou rovin

Odchylka dvou rovin je rovna odchylce jejich průsečnic s třetí rovinou, která je k oběma rovinám kolmá.

Cvičení

Př. 1: Je dána krychle ABCDEFGH. Určete odchylku

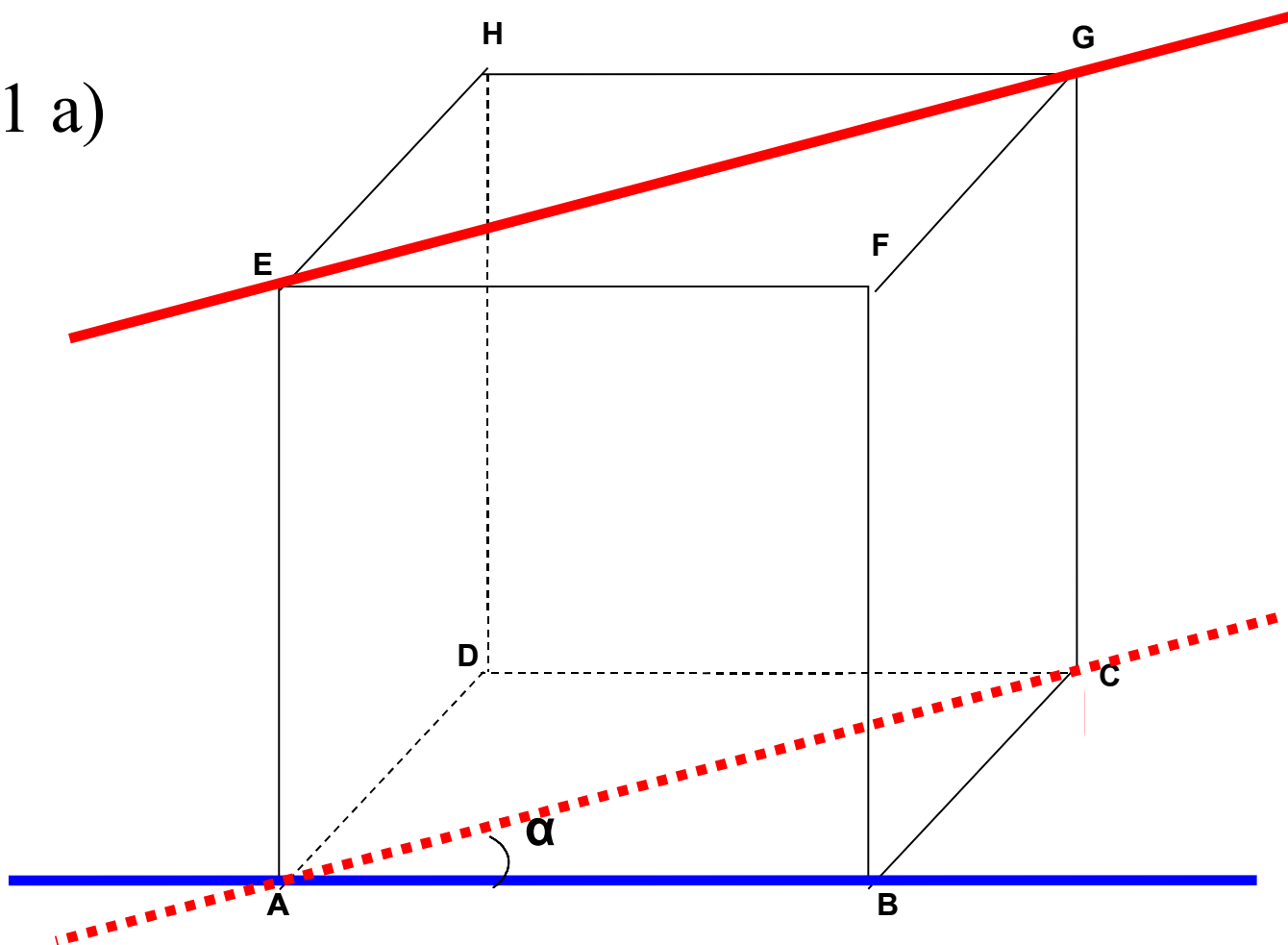
- | | |
|------------------|----------------|
| přímek a) AB, EG | 45° |
| b) AH, CF | 90° |
| c) AD, GF | 0° |
| d) AC, AG | $35^\circ 16'$ |

Př. 2: Je dán pravid. čtyřboký jehlan ABCDV, jehož stěny jsou rovnostr. Δ -ky. Určete odchylku přímek AB, CV. 60°

Př. 3: Je dán kvádr ABCDEFGH: $|AB|=6$ cm, $|BC|=3$ cm, $|AE|=8$ cm. Určete odchylku přímek EG, BD. $53^\circ 8'$

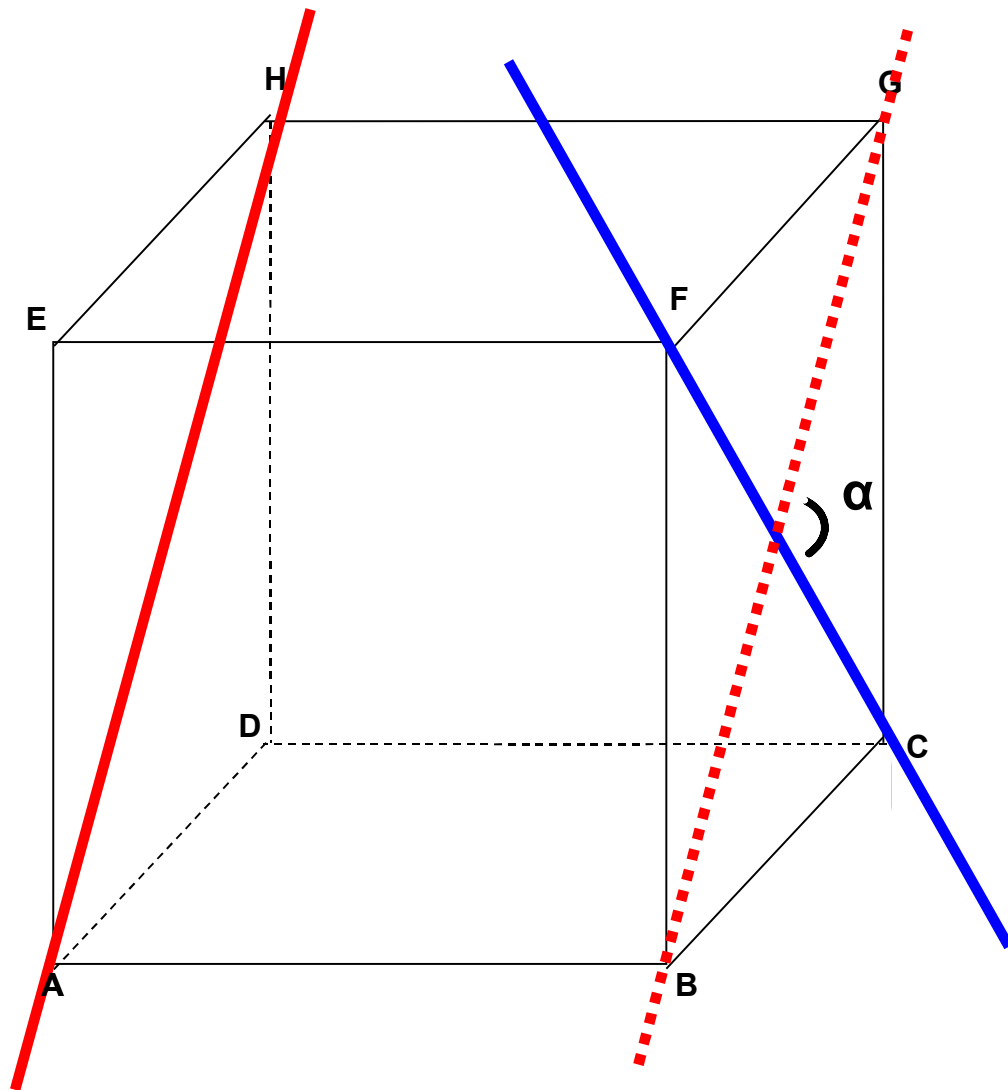
Cvičení

Př. 1 a)



Cvičení

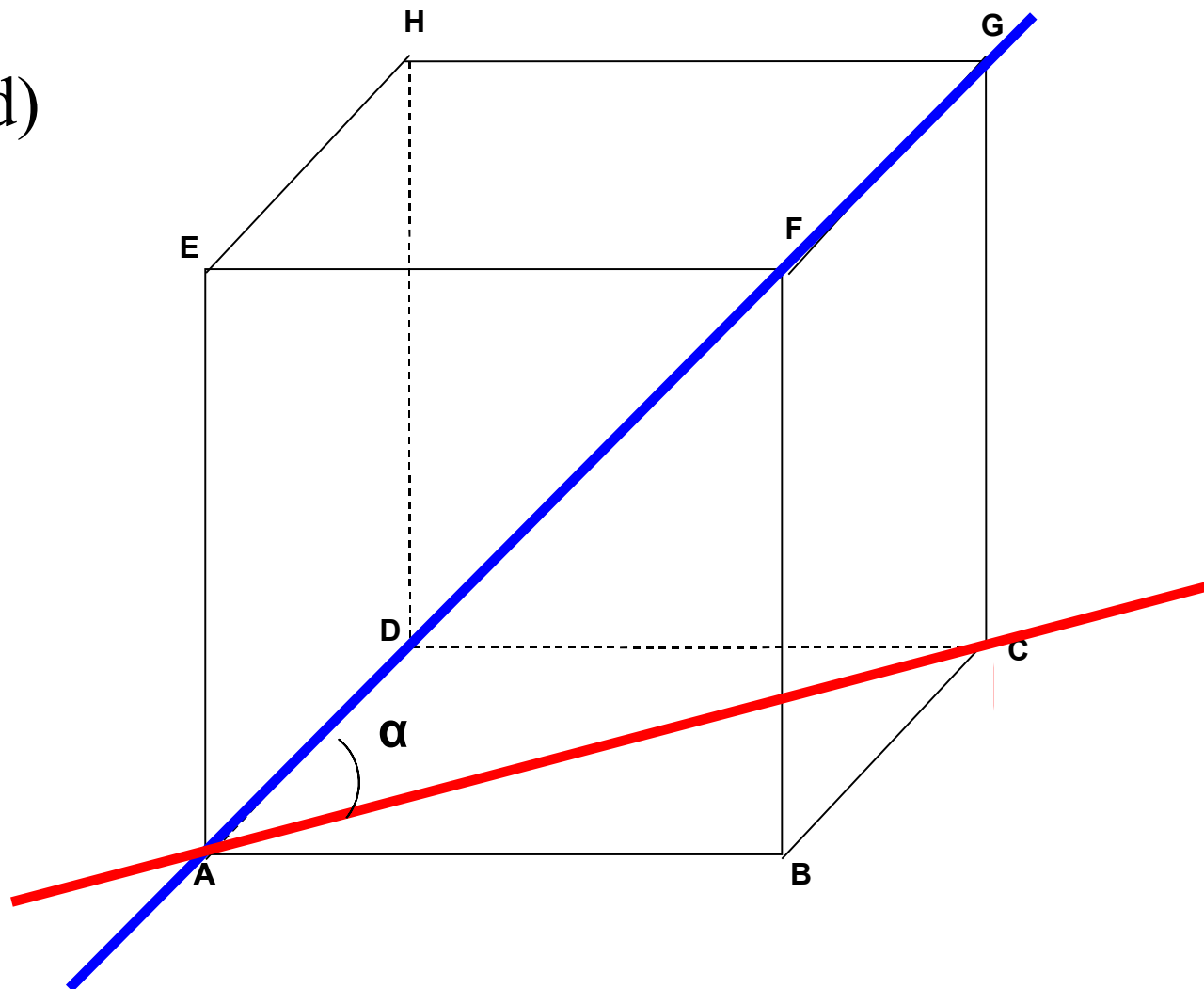
Př. 1 b)



Cvičení

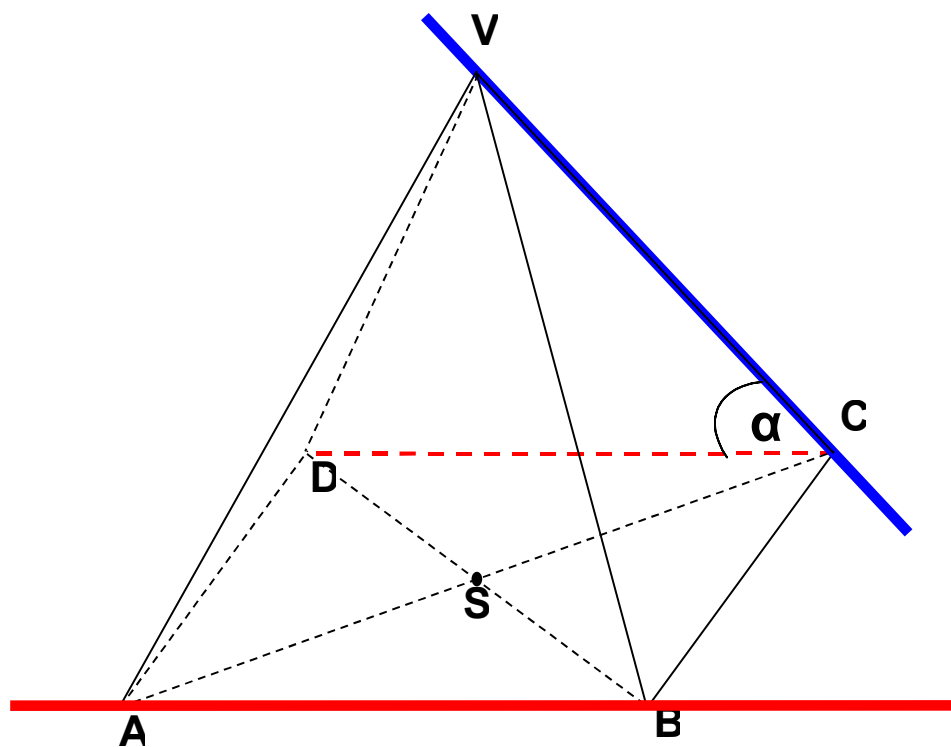
Př. 1 d)

$\triangle ACG$



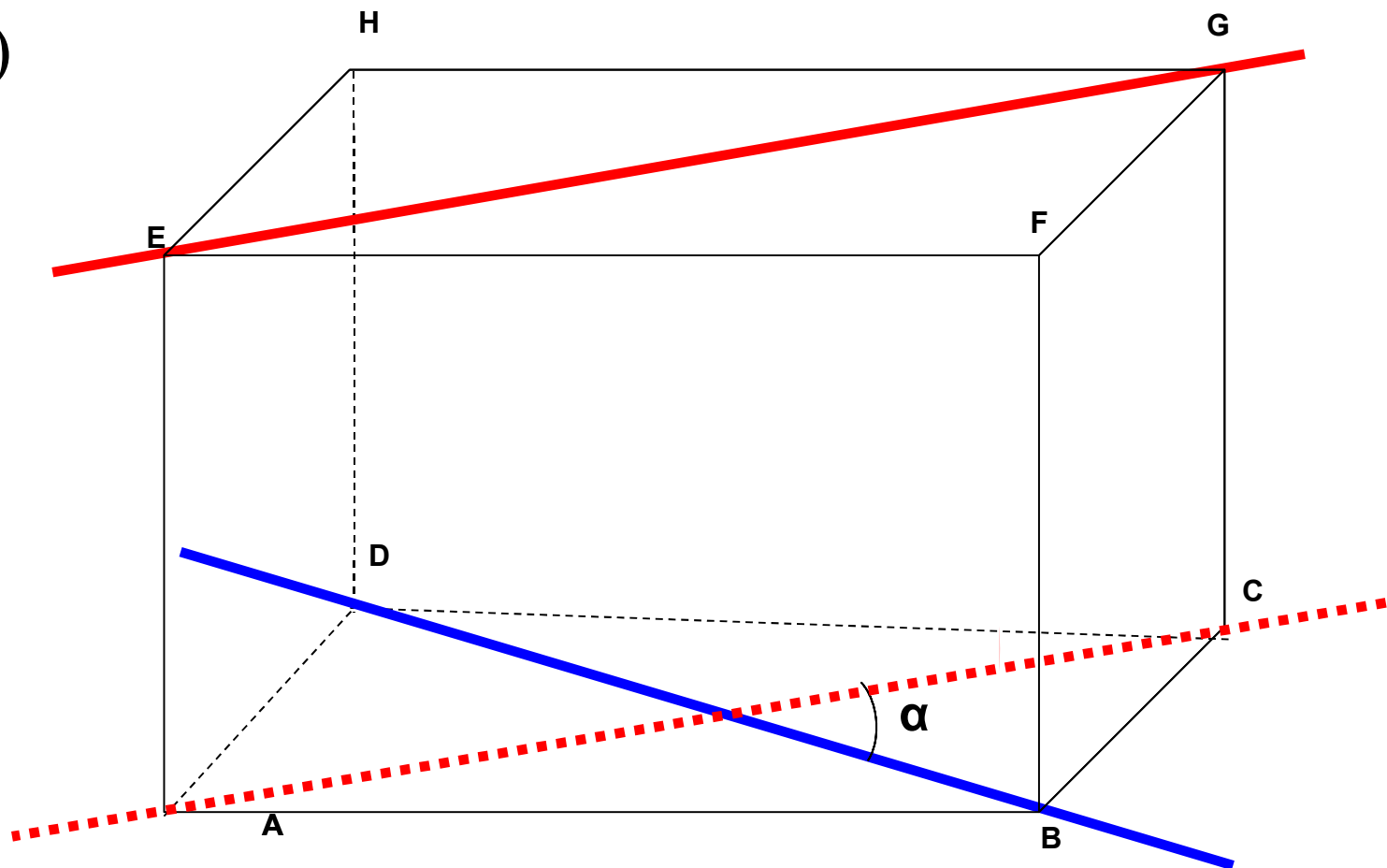
Cvičení

Př. 2



Cvičení

Př. 3)



Cvičení

Př. 4: Je dána krychle ABCDEFGH o straně délky 5cm.

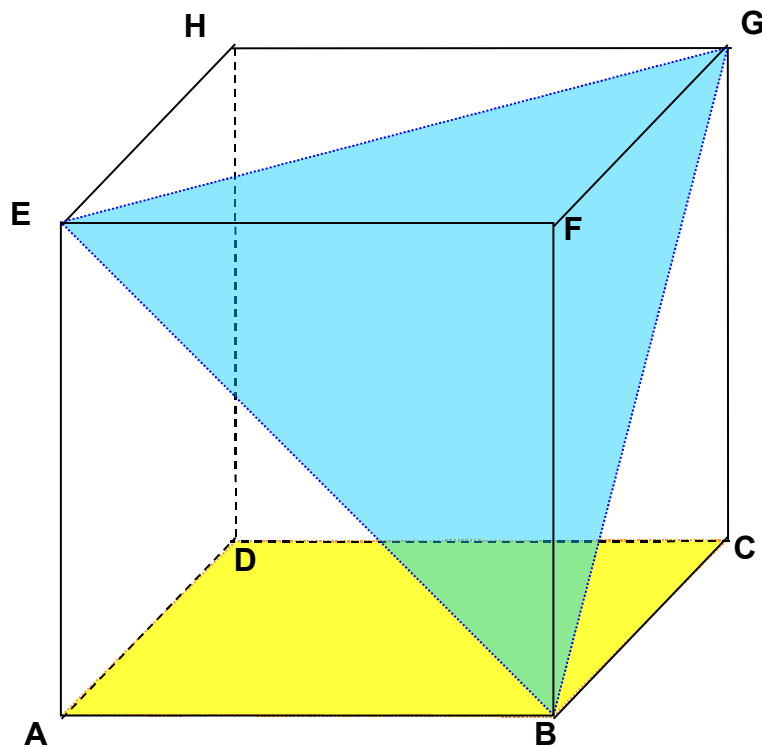
? Určete odchylku rovin ABC a BEG 54°44'

Př. 5: Je dán pravid. čtyřboký jehlan ABCDV, $|AB|=5$ cm,

? $|AV|=7$ cm. Určete odchylku roviny boční stěny a roviny podstavy. 67°31'

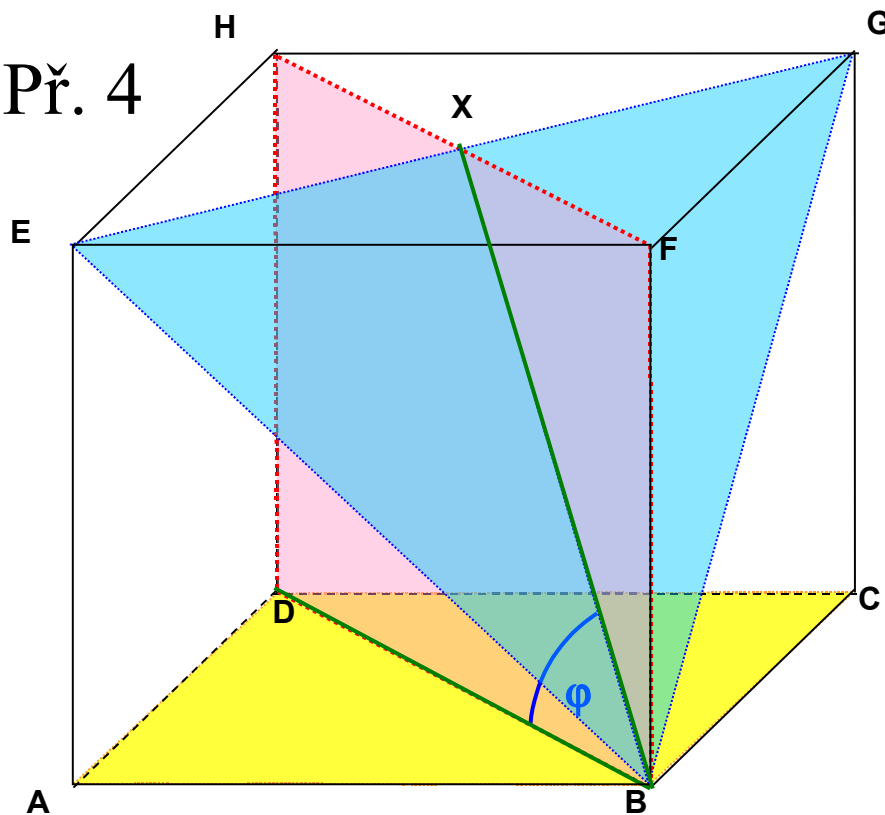
Cvičení

Př. 4

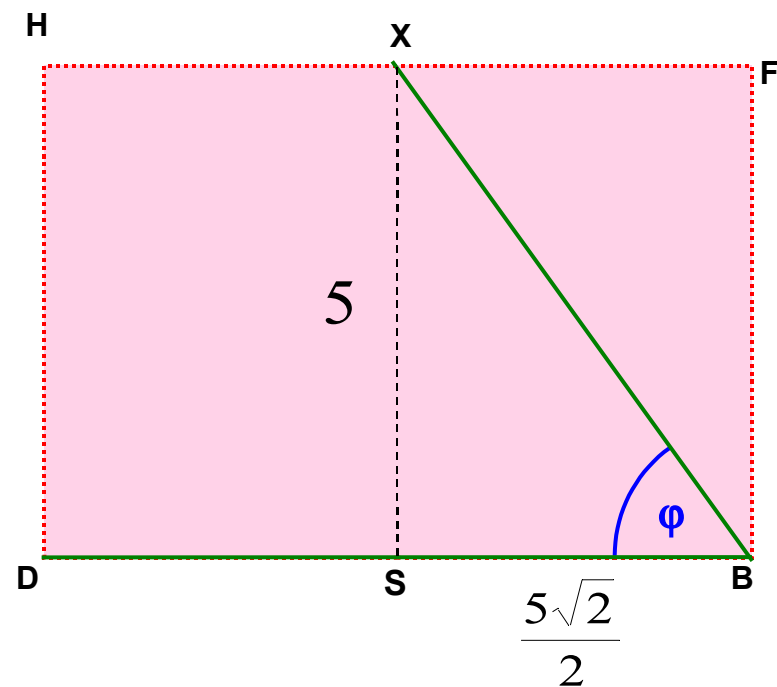


Cvičení

Př. 4

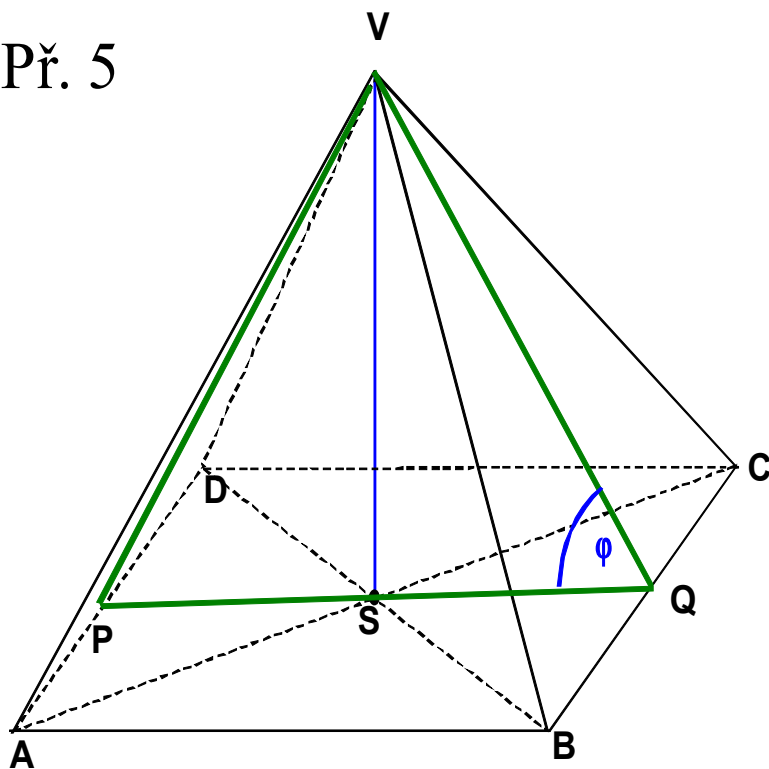


$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{5}{\frac{5\sqrt{2}}{2}}$$

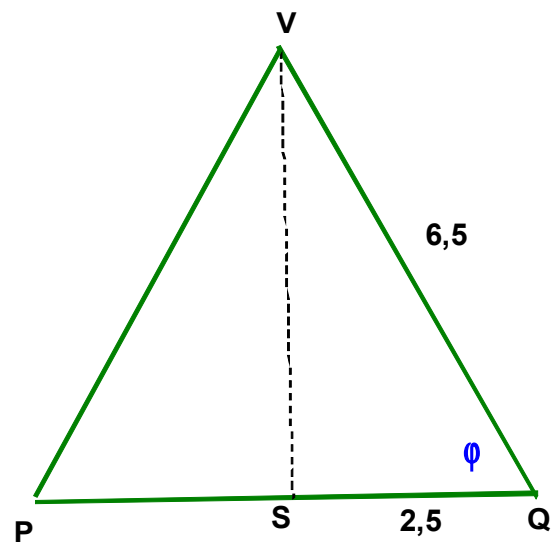


Cvičení

Př. 5



$$\cos \varphi = \frac{2,5}{6,5}$$



Vzdálenost bodu

Vzdálenost bodu A od přímky p je rovna vzdálenosti bodů AP , kde P je pata kolmice vedené bodem A k přímce p .

Vzdálenost bodu A od roviny ρ je rovna vzdálenosti bodu A a jeho pravoúhlého průmětu A' do roviny ρ .

Cvičení

Př. 1: Je dána krychle ABCDEFGH o délce hrany a .

Určete vzdálenost

a) přímek AB a GH

$$a\sqrt{2}$$

b) rovin ABC a FGH

$$a$$

c) bodu A od přímky FH

$$a\sqrt{\frac{3}{2}}$$

d) bodu A od přímky BH

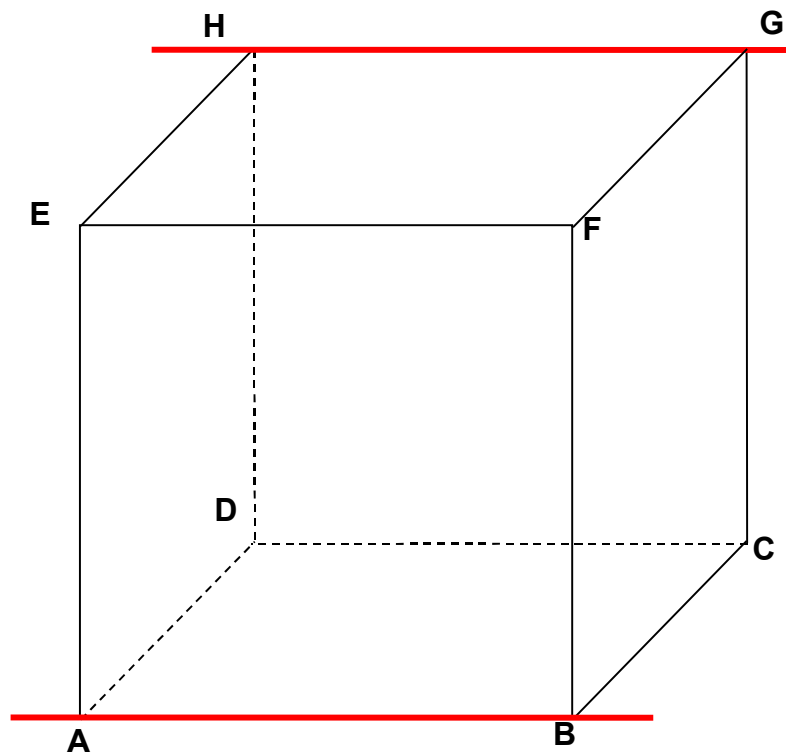
$$a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Př. 2: Je dán čtyřboký pravidelný jehlan ABCDV s délkou hrany podstavy 6 cm a výškou 5cm.

Určete vzdálenost bodu A od přímky CV.

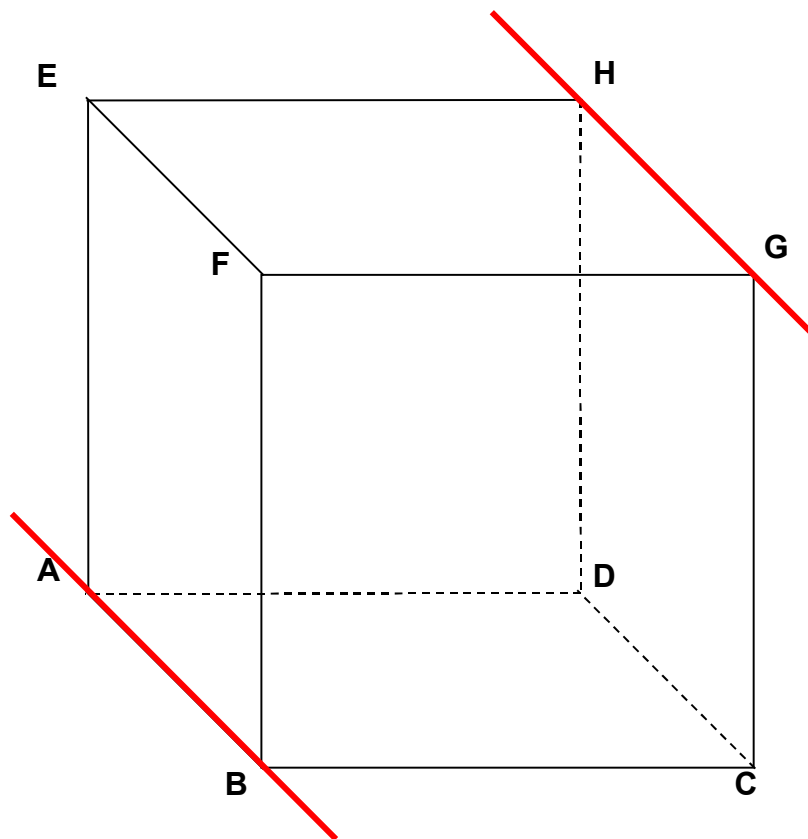
Cvičení

Př. 1 a)



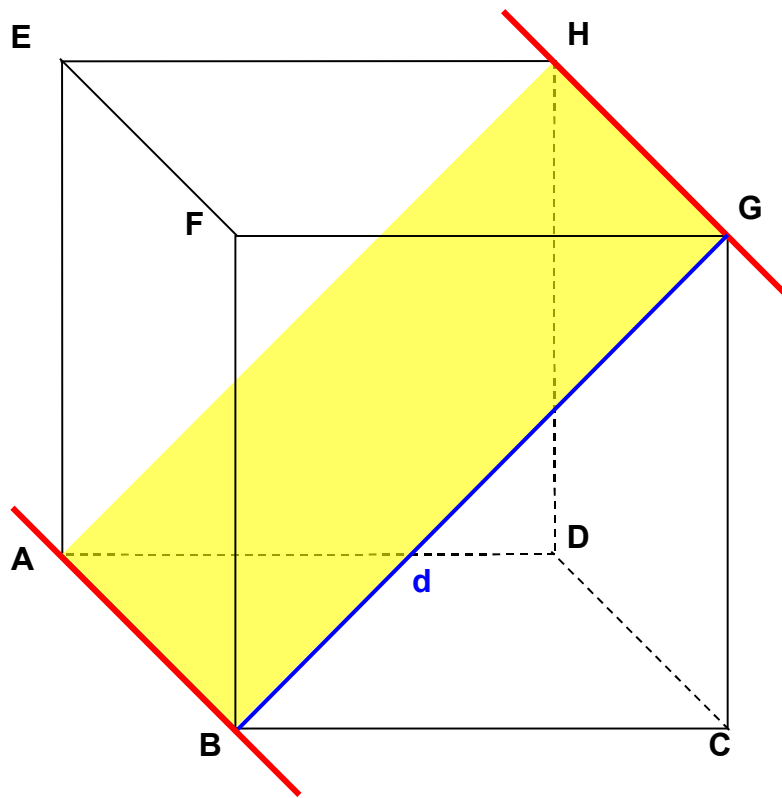
Cvičení

Př. 1 a)



Cvičení

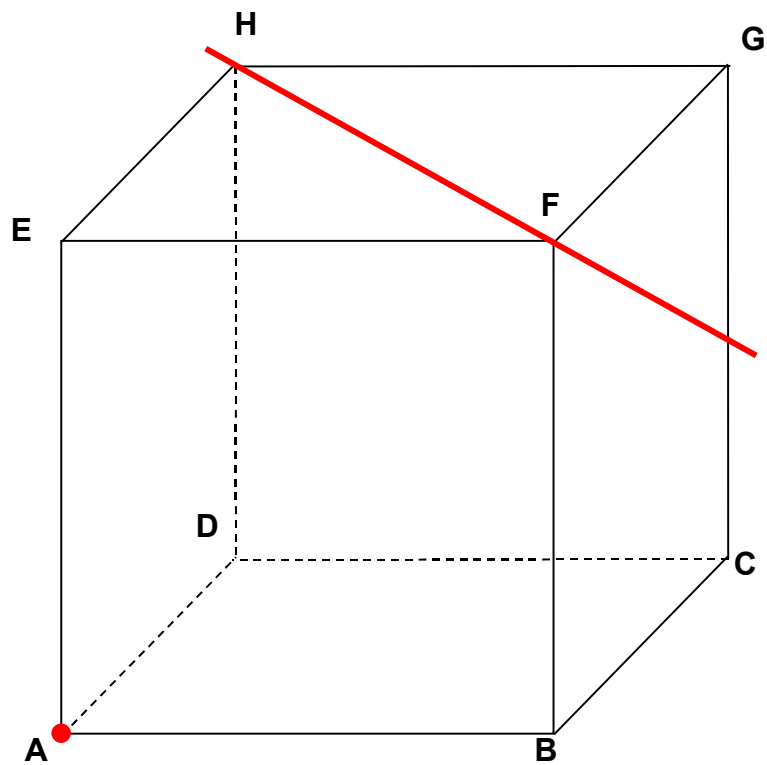
Př. 1 a)



$$d = a\sqrt{2}$$

Cvičení

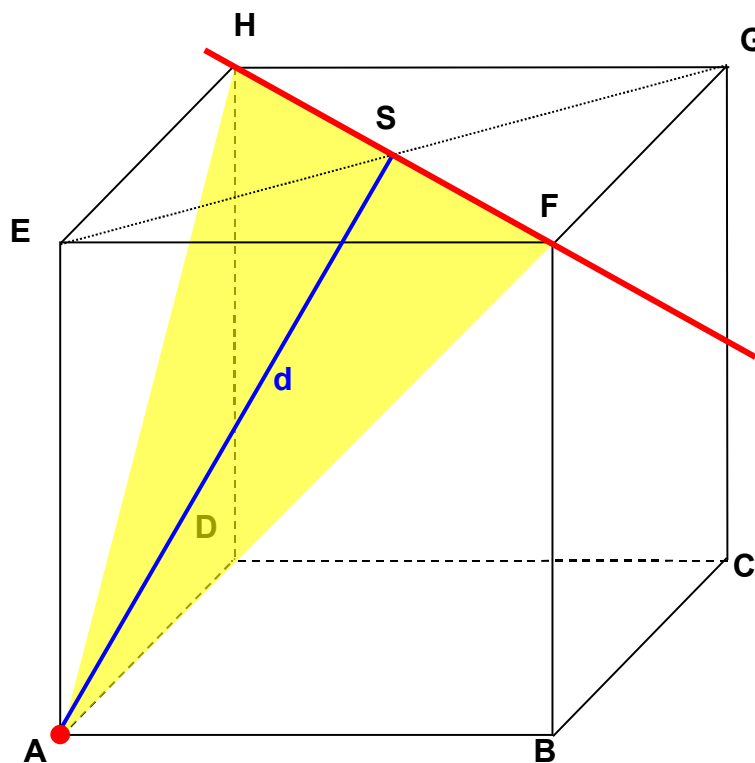
Př. 1 c)



Cvičení

Př. 1 c)

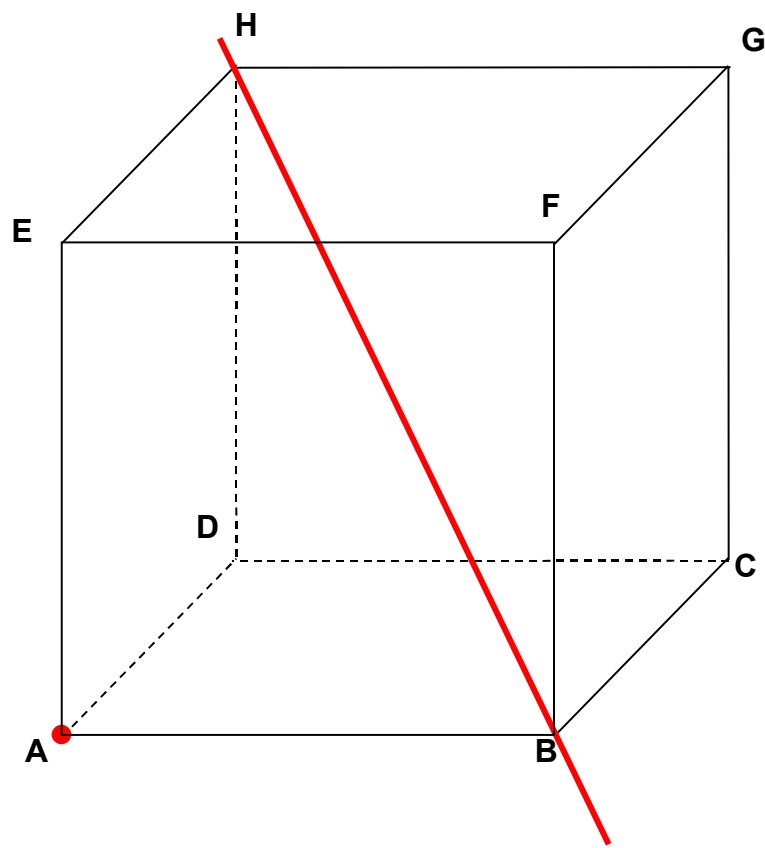
$\triangle AFH$



$$d = a\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Cvičení

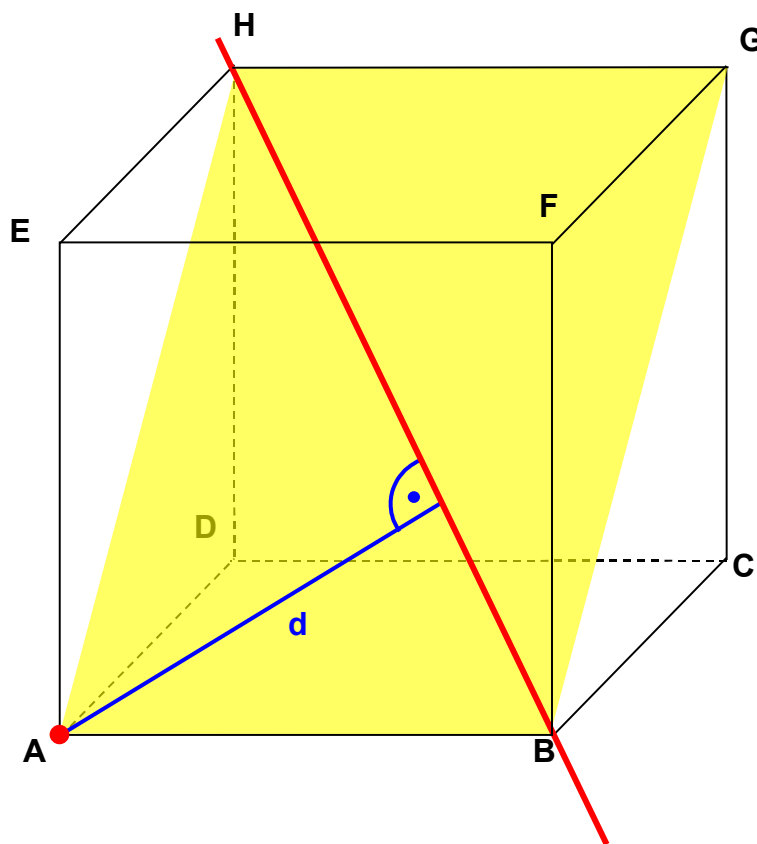
Př. 1 d)



Cvičení

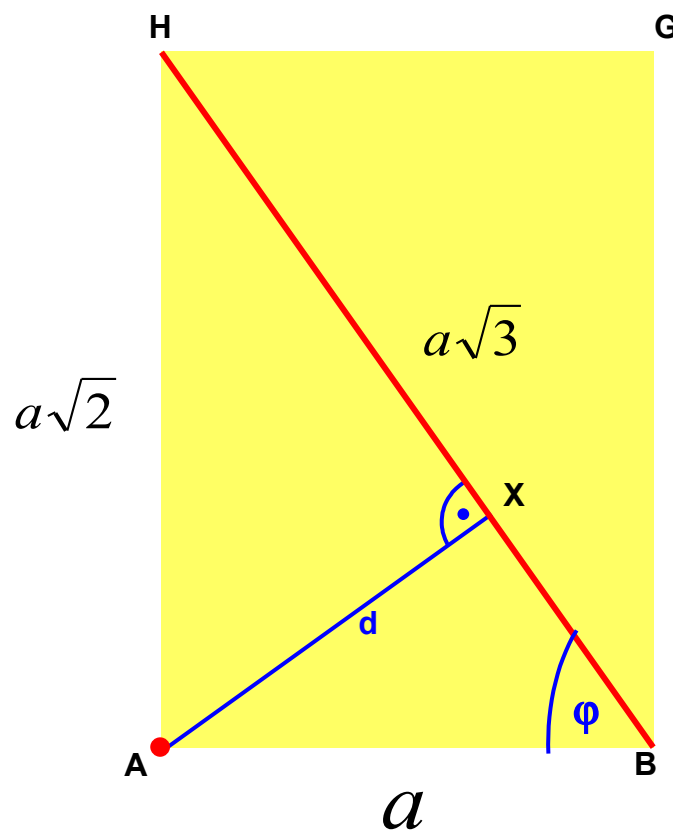
Př. 1 d)

$\triangle ABH$



Cvičení

Př. 1 d)



$\triangle ABH$

$$\sin \varphi = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\sin \varphi = \frac{d}{AB}$$

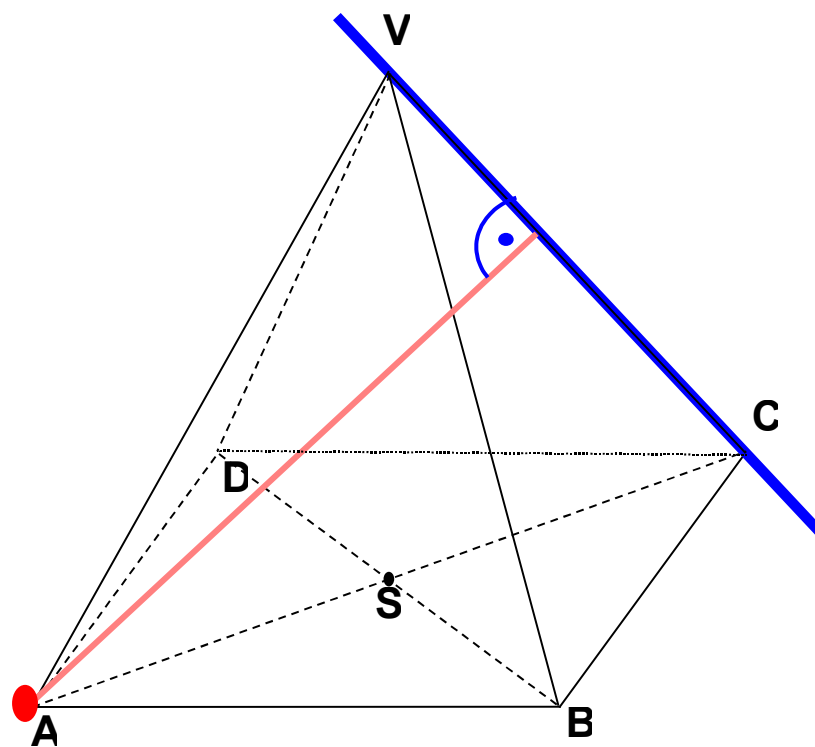
$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{d}{a}$$

$$d = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Cvičení

Př. 3

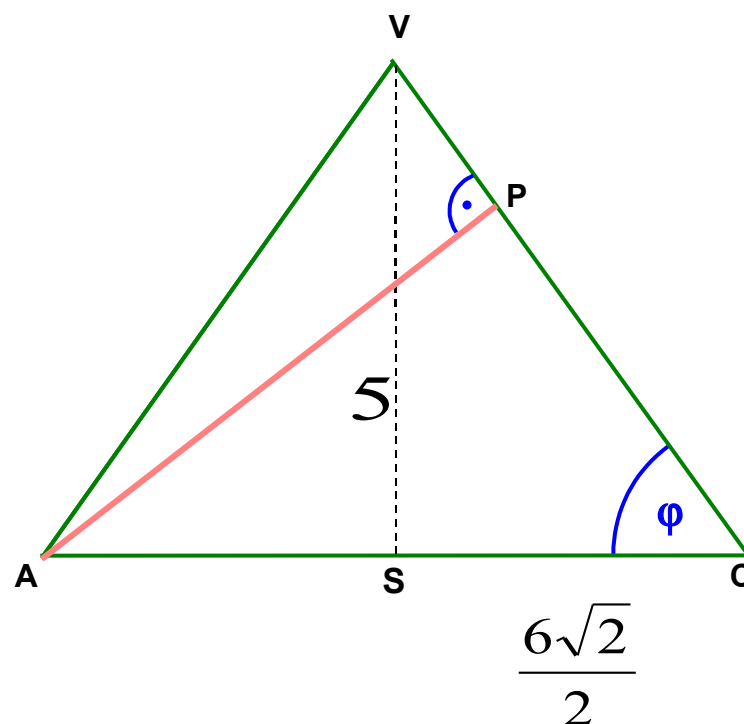
$\triangle ACV$



Cvičení

Př. 2

$\triangle ACV$



$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{VS}{SC} = \frac{5}{\frac{6\sqrt{2}}{2}}$$

$$\varphi = 49^{\circ} 41'$$

$$\sin \varphi = \frac{AP}{AC} = \frac{d}{6\sqrt{2}}$$

$$d = 6,46$$

Kolmost přímek a rovin

Přímka k je kolmá k rovině ρ právě tehdy, je-li kolmá ke všem přímkám této roviny. Průsečík kolmice s rovinou je pata kolmice.

Platí: $p \perp \alpha$ a $q \perp \alpha \Rightarrow p \parallel q$
 $p \perp \alpha$ a $q \parallel p \Rightarrow q \perp \alpha$
 $\alpha \perp p$ a $\beta \perp p \Rightarrow \alpha \parallel \beta$
 $p \perp \alpha$ a $p \parallel \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$

Věta 1: Daným bodem lze vést k rovině jedinou kolmici.

Věta 2: Daným bodem lze vést k dané přímce jedinou kolmou rovinu.

Kolmost rovin

Dvě roviny jsou k sobě kolmé právě tehdy, když jedna z nich obsahuje přímku kolmou k druhé rovině.

Rovina je kolmá ke dvěma různoběžným rovinám právě tehdy, je-li kolmá k jejich průsečnici.

Cvičení

Př. 3: Je dána krychle ABCDEFGH s délkou hrany 6 cm, bod M je bodem hrany EH.

Určete vzdálenost mimoběžek

a) AB a FG

$$v = |BF| = 6 \text{ cm}$$

b) AC a FM

$$v = |PQ| = 6 \text{ cm}, Q \text{ je průsečík FM a EG}$$